流体工学I

No.05
連続の式と流速、流量
流体粒子の加速度
流線方向の運動方程式

1

3.3 連続の式

一次元流れにおける長さ ds の微小流管に，**質量保存の法則** (mass conservation law) を適用すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) = 0 \quad \text{(例題 3.4 参照)} \tag{3.2}$$

が得られる．ここで，ρ は流体の密度，A は流管の断面積，v は A における平均流速である．式 (3.2) は一次元流れの**連続の式** (equation of continuity) とよばれる．式 (3.2) において，定常流では，

$$\rho v A = \text{const.} \tag{3.3}$$

となり，とくに非圧縮性流体 ($\rho = \text{const.}$) の定常流では，

$$Q = vA = \text{const.} \tag{3.4}$$

で表される．ここで，Q は体積流量である．

なお，式 (3.3) の対数微分をとると，

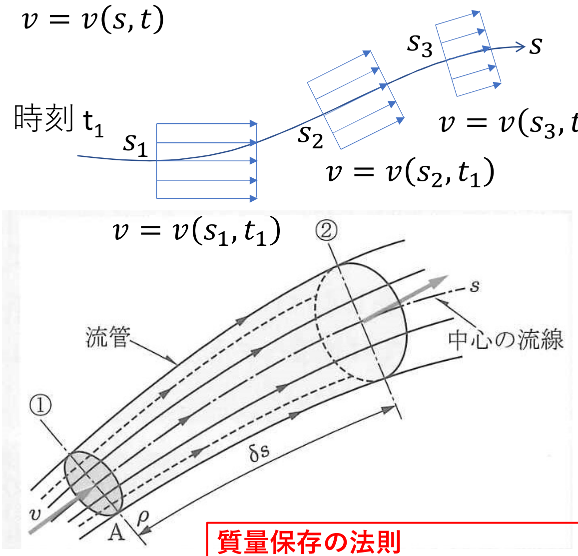
$$d(\ln \rho) + d(\ln v) + d(\ln A) = 0$$

となるので，定常流の連続の式は，

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{3.5}$$

でも表される．

2



各断面において
ρ, vは一様（断面一様）

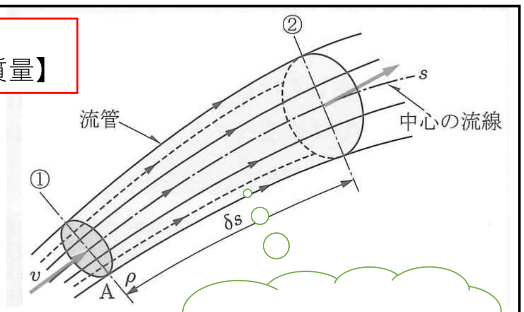
①②間の流管内
にたまった質量

質量保存の法則
δt間の
【①②間の流管内への正味の流入質量】
＝ 【断面①への流入質量】－【断面②からの流出質量】

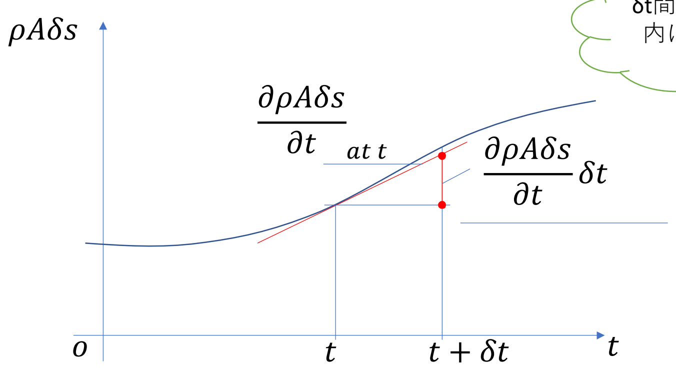
3

δt間の
【①②間の流管内への正味の流入質量】

①②間の流管内質量 $\rho A\delta s$



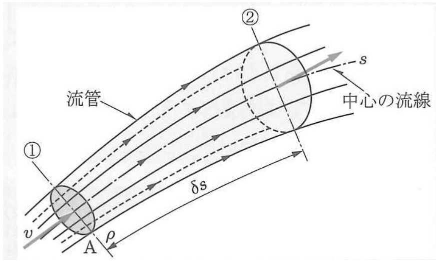
δt間に①②間の流管
内にたまった質量



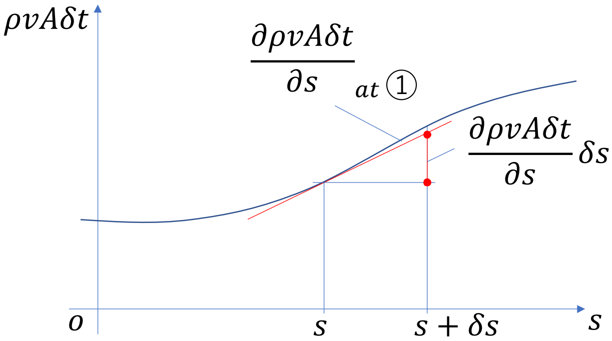
$$\boxed{\frac{\partial \rho A\delta s}{\partial t}\delta t}$$

4

δt間の【断面①への流入質量】，
【断面②からの流出質量】



各断面において ρ, vは一様
①、②断面を通過する質量 $\rho v A \delta t$



$$-\frac{\partial \rho v A \delta t}{\partial s} \delta s$$

5

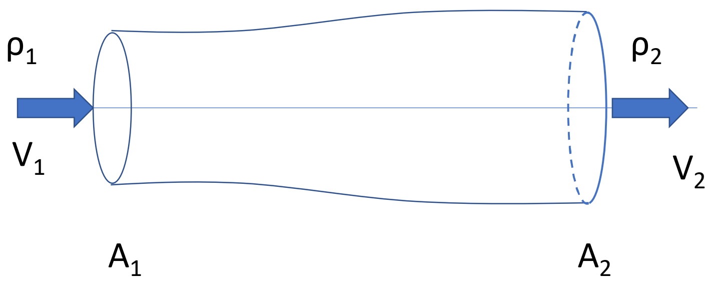
質量保存の法則
δt間の
【①②間の流管内への正味の流入質量】
＝ 【断面①への流入質量】 － 【断面②からの流出質量】

$$\frac{\partial \rho A \delta s}{\partial t} \delta t = -\frac{\partial \rho v A \delta t}{\partial s} \delta s$$
$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} \delta s \delta t + \frac{\partial \rho v A}{\partial s} \delta t \delta s = 0$$
$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho v A}{\partial s} = 0$$

定常な流れ

$$\frac{\partial \rho v A}{\partial s} = 0$$
$$\rho v A = \text{一定}$$

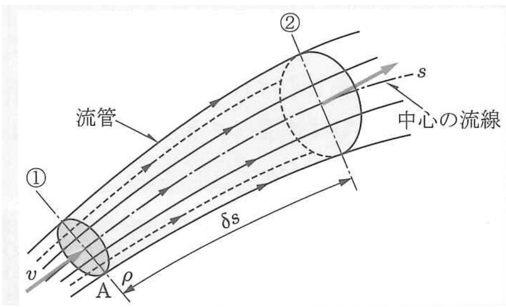
6



流速、密度は断面一様

定常流の
質量流量M(kg/s)
$M = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$
非圧縮性流体の場合
体積流量 (m³/s)
$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$
非圧縮性流体の場合、
単に流量という。

7



圧縮性流体において
$\rho v A = cons.$

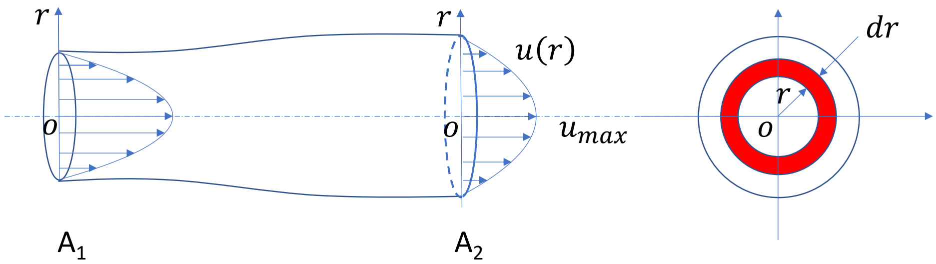
中心流線に沿って微分すると
$$\frac{d}{ds}(\rho v A) = 0$$
$$vA\frac{d\rho}{ds} + \rho A\frac{dv}{ds} + \rho v\frac{dA}{ds} = 0$$

これを
$$\frac{\rho v A}{ds}$$

で割ると、
全微分で表現される連続の式
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

がえられる。

8

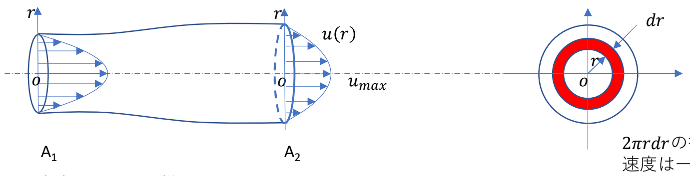


$$u(r) = u_{max}\left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$$

$2\pi rdr$の微小断面において、速度は一様と考える。
$dQ = u(r)2\pi rdr$

流速は断面非一様
軸対象な流速分布
このような速度分布は層流で現れる。

9



$2\pi rdr$の微小断面において、
速度は一様と考える。
$dQ = u(r)2\pi rdr$

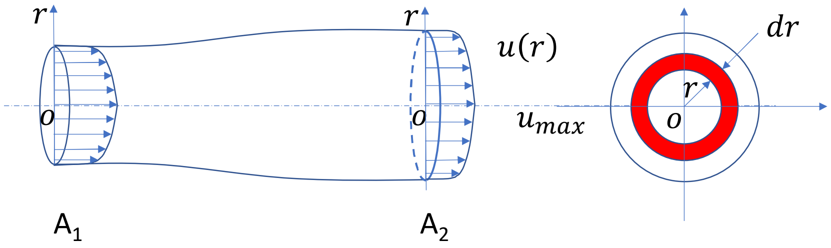
流速は断面非一様
軸対象な流速分布
このような速度分布は層流で現れる。

$$u(r) = u_{max}\left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$$

$$Q = \int dQ = \int_0^R u(r) \times 2\pi rdr$$
$$= \pi \int_0^R u_{max}\left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \times 2rdr$$
$$= \frac{\pi R^2}{u_{max}} \int_0^{u_{max}} udu$$
$$= \frac{1}{2}\pi R^2 u_{max}$$

$$\frac{r}{u}\left|\frac{0 \quad \to R}{u_{max} \to 0}\right.$$
$$\frac{du}{dr} = -u_{max}\frac{2r}{R^2}$$
$$2rdr = -\frac{R^2 du}{u_{max}}$$

10

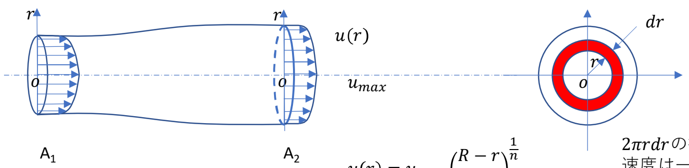


$$u(r) = u_{max}\left(\frac{R-r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$2\pi rdr$の微小断面において、速度は一様と考える。
$dQ = u(r)2\pi rdr$

流速は断面非一様
軸対象な流速分布
このような速度分布は乱流で現れる。

11



$$u(r) = u_{max}\left(\frac{R-r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$2\pi rdr$の微小断面において、
速度は一様と考える。
$dQ = u(r)2\pi rdr$

流速は断面非一様
軸対象な流速分布
このような速度分布は層流で現れる。

$$Q = \int dQ = \int_0^R u(r) \times 2\pi rdr$$

$$= 2\pi \int_0^R u_{max}\left(\frac{R-r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} rdr$$

$$= 2\pi R^2 u_{max} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}}(1-t)dt$$

$$t = \frac{R-r}{R}$$

$$\begin{array}{c|c} r & 0 \to R \\ \hline t & 1 \to 0 \end{array}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{R}$$

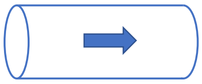
$$dr = -Rdt$$

$$r = R(1-t)$$

12

課題番号　FE1No05

(1)　直径 30 cm の円管内を毎分 3.50 m^3 の水が流れている。この時、円管内の断面平均流速は幾らか？
なお、有効数値は3桁とする。



$Q = 3.50\ m^3/min$

例題3.4
演習問題3.2
演習問題3.3
演習問題3.5

13

流体粒子の加速度
流線方向の運動方程式

14

3.4 流体粒子の加速度

流体粒子の加速度 $\boldsymbol{a}$ は，速度変化 $\Delta\boldsymbol{v}$ の時間 Δt に対する割合で，

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{3.6}$$

で表され，一つのベクトルである．

一般に，図 3.6 のように曲がる流れにおいては，流体粒子点 P の加速度 $\boldsymbol{a}$ は，流線方向の接線加速度 $a_{\rm s}$ と流線に垂直方向の法線加速度 $a_{\rm n}$ とに分解される．それらの大きさは，速度が位置 s と時間 t との関数であるから，数学的に全微分して得られる．すなわち，非定常流では，

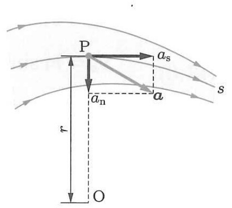


図 3.6　変加速度曲線運動をする流体粒子の加速度

$$\left.\begin{aligned}a_{\rm s}&=\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt}+\frac{\partial v}{\partial t}=v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}\\ a_{\rm n}&=\frac{dv_{\rm n}}{dt}=\frac{\partial v_{\rm n}}{\partial s}\frac{ds}{dt}+\frac{\partial v_{\rm n}}{dt}=\frac{v^2}{r}+\frac{\partial v_{\rm n}}{\partial t}\\ a&=\sqrt{a_{\rm s}{}^2+a_{\rm n}{}^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

ここで，r は点 P における流線の曲率半径，v は接線方向の速度成分，$v_{\rm n}$ は法線方向の速度成分で，$a_{\rm n}$ は物理学における求心加速度に相当する．

15

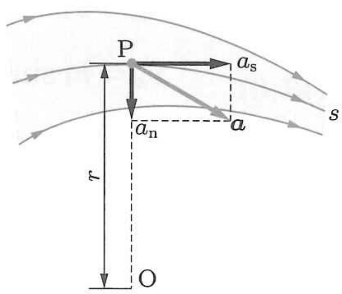


図 3.6　変加速度曲線運動をする流体粒子の加速度

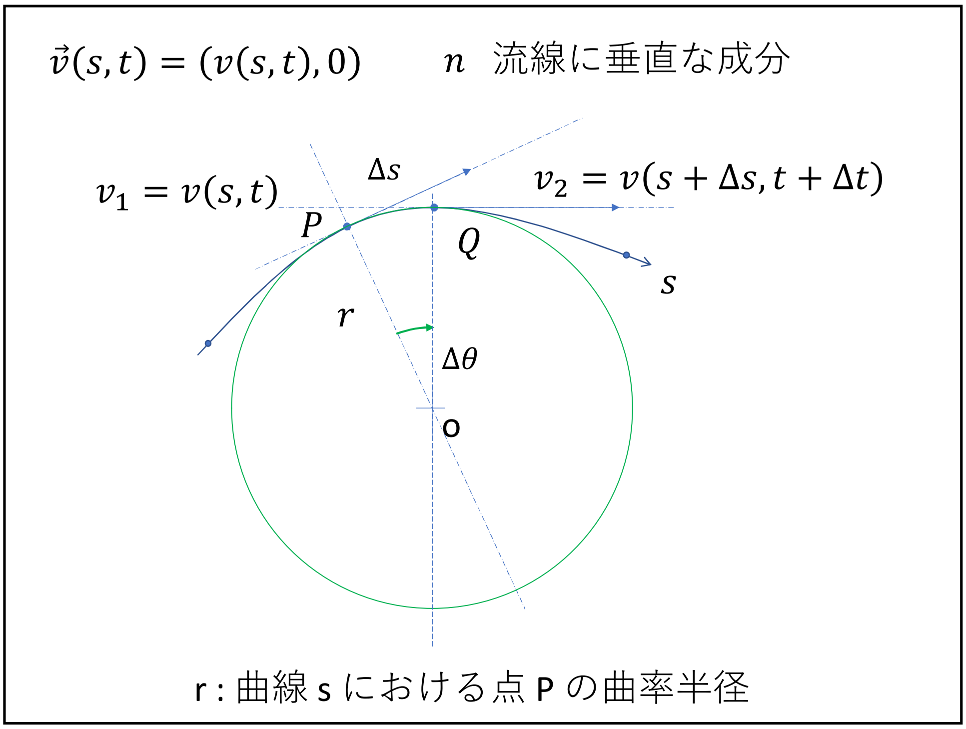
定常流では，

$$\left.\begin{aligned}a_{\rm s}&=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}\\ a_{\rm n}&=\frac{v^2}{r}\\ a&=\sqrt{a_{\rm s}{}^2+a_{\rm n}{}^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

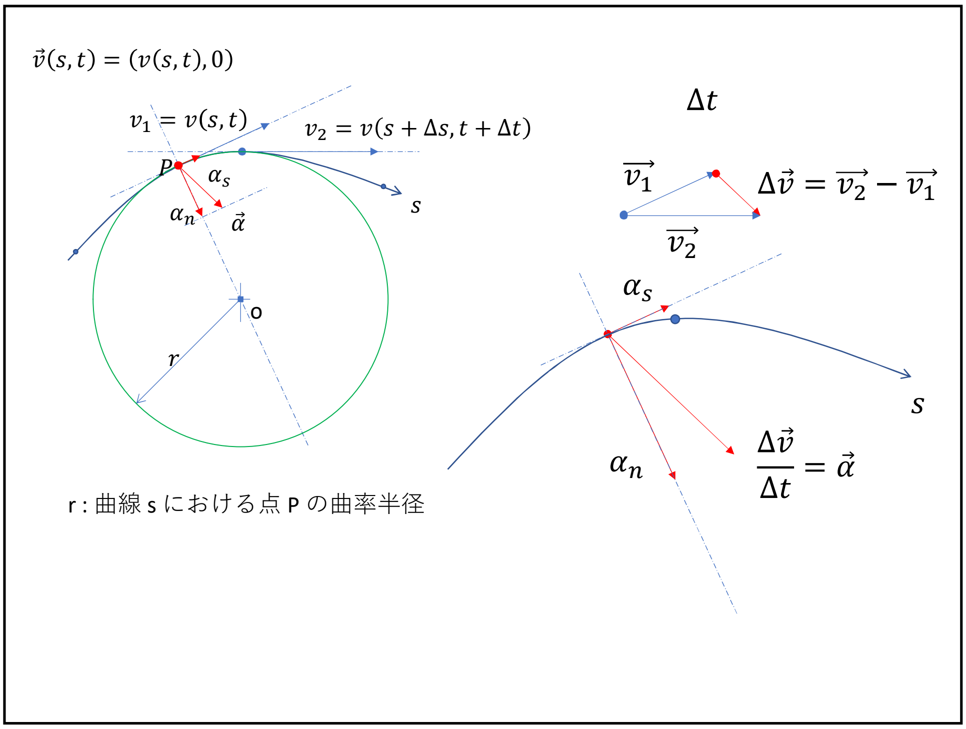
で表される (例題 3.6 参照).

流線がまっすぐで方向が変わらなければ，式 (3.8) において，$r=\infty$ で $a_{\rm n}=0$ となり，$a_{\rm s}$ のみで表される．

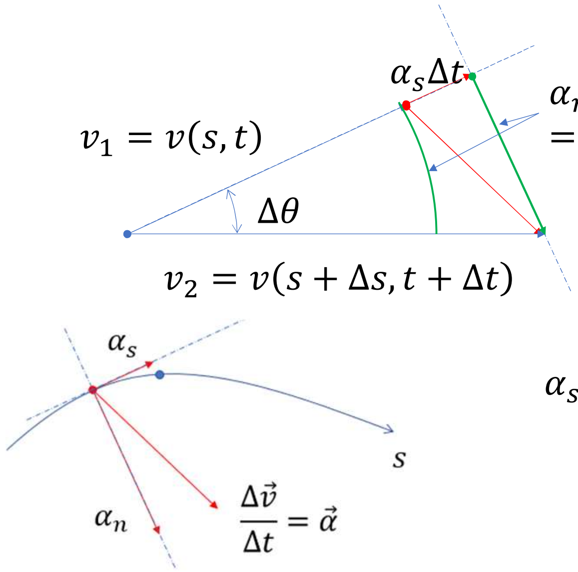
16


$\vec{v}(s,t) = (v(s,t),0)$
n 流線に垂直な成分
Δs
$v_1 = v(s,t)$
$v_2 = v(s+\Delta s, t+\Delta t)$
P
Q
s
r
$\Delta\theta$
o
r : 曲線 s における点 P の曲率半径

17


$\vec{v}(s,t) = (v(s,t),0)$
$v_1 = v(s,t)$
$v_2 = v(s+\Delta s, t+\Delta t)$
P
α_s
α_n
$\vec{\alpha}$
s
o
r
r : 曲線 s における点 P の曲率半径
Δt
$\overrightarrow{v_1}$
$\overrightarrow{v_2}$
$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$
α_s
s
α_n
$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{\alpha}$

18



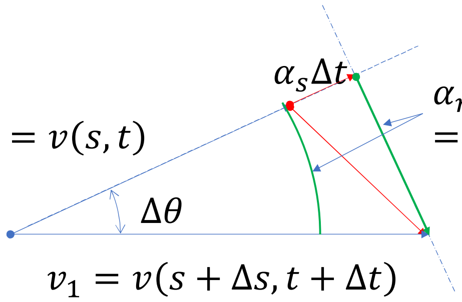
$$\alpha_n \Delta t = \Delta v_n = v_1 \Delta\theta = v\Delta\theta$$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{\alpha} = (\alpha_s, \alpha_n)$$

$$\alpha_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\Delta s}{\Delta t} + \frac{\partial v}{\partial t} = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

19



$$\alpha_n \Delta t = \Delta v_n = v_1 \Delta\theta = v\Delta\theta$$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

$$\alpha_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{\partial v_n}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial t} = v\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial t} = v\frac{v\Delta\theta}{r\Delta\theta} + \frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{v^2}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial t}$$

$$v^2 = (r\omega)^2$$

$$\frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

1kg当たりの遠心力

20

3.5 噴流の経路

噴流を空気中で，水平面に対して角度 θ，初速度 v_1 で斜め上方に噴射させるときは，重力の作用で速度の垂直成分が連続的に変化して放物線の形を示す．これを**噴流の経路** (jet trajectory) という．

図 3.7 のように，噴射点を原点とし，水平方向に x 軸，鉛直方向に z 軸をとれば，x 軸方向の速度成分は等速運動，z 軸方向の速度成分は重力による等加速度運動である．したがって，噴射して t 秒後の位置 $\mathrm{P}(x, z)$ は，空気抵抗を無視すれば，

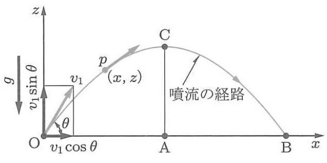


図 3.7　噴流の経路

速度：$v_x = v_1 \cos\theta$

$v_z = v_1 \sin\theta - gt$

変位：$x = (v_1 \cos\theta)t$

$z = (v_1 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

噴流の経路：

$$z = (\tan\theta)x - \frac{g}{2{v_1}^2 \cos^2\theta}x^2 \quad (3.11)$$

$$\alpha_x = 0 \quad (3.9)$$

$$\alpha_z = \frac{dv_z}{dt} = -g \quad (3.10)$$

で与えられる．式 (3.11) は二次関数の式で放物線を示す．

21

$$\alpha_x = 0$$
$$\alpha_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$$

$$\Rightarrow$$

$$v_x = v_1 \cos\theta$$
$$v_z = \int \alpha_z dt + C_{1z}$$
$$= -gt + v_1 \sin\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow$$

$$x = \int v_x dt + C_{2x}$$
$$z = \int v_z dt + C_{2z}$$

課題１．　式(3.9)から(3.10)，(3.11)
を導きなさい。

22

課題２．　図 3.36 において，噴流の最高位置の点 B における速度が 15.0 m/s であるとき，ノズル出口①の速度v_1を求めなさい。ただし、空気抵抗は無視する。

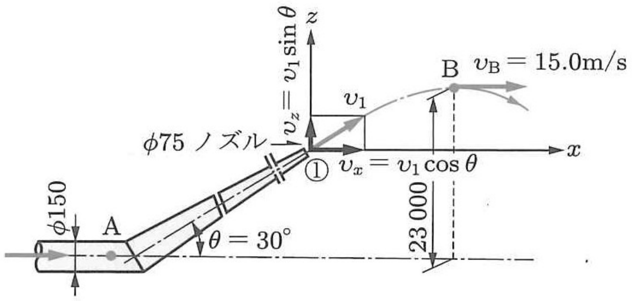


図 3.36

23